کارگاه برنامه ریزی خطی

در نظام بهداشت و درمان

دکتر حسین بیورانی

دانشیار گروه آمار دانشگاه تبریز

bevrani@gmail.com

اردیبهشت ۹۲

مروری بر آنچه گذشت

- مقدمه، تعاریف و تاریخچه
- مدل سازی ریاضی خطی (مفاهیم، متغیرهای تصمیم، مثال)
- رویه حل مدل های برنامه ریزی خطی
- روش هندسی
- روش سیمپلکس (ریاضیات، مفاهیم، و الگوریتم)
- حالت های خاص مدل های ریاضی خطی
- آشنائی با نرم افزار Winqsb

صورت کلی مدل ریاضی خطی

$$Max\, c = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$st$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \qquad \forall j$$

$$x_i \ge 0 \qquad \forall i$$

مراحل فرموله سازی یک مدل ریاضی

۱ – تعریف متغیرهای تصمیم

۲ – فرموله کردن تابع هدف

۳– فرموله کردن محدودیت ها

مثال اول

- پزشک یک بیمارستان در صدد تهیه یک رژیم غذایی برای یک گروه بخصوص بیمار است. بدین منظور وی سعی دارد استانداردهای بهداشتی را برای آنها تعریف کند. دستورالعمل زیر برگرفته از این استانداردها است:
- مقدار کالری بین ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰
- حداقل ۵ میلی گرم آهن
- بین ۲۰ تا ٦۰ گرم چربی
- حداقل ۳۰ گرم پروتئین
- حداقل ٤۰ گرم کربوهیدرات
- حداکثر ۳۰ میلی گرم کلسترول

پزشک بیمارستان بدین منظور برنامه غذایی خود را بر اساس ٦ غذا تنظیم خواهد کرد. میزان ترکیبات هر غذا و هزینه هر واحد از آنها به شرح زیر است. پزشک بیمارستان بر آن است تا ضمن برآورد کردن نیازمندی غذایی بیماران، هزینه غذا نیز حداقل گردد. مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

نوع غذا	کالری	آهن	پروتئین	کربوهیدرات	چربی	کلسترول	هزینه
مرغ	٥٢٠	٤/٤	١٧	٠	٣٠	١٨٠	٨٠٠
ماهی	٥٠٠	٣/٣	٨٥	٠	٥	٩٠	٣٧٠
گوشت گوسفند	٨٦٠	٠/٣٠	٨٢	٠	٧٥	٣٥٠	٢٣٠
گوشت گاو	٦٠٠	٣/٤	١٠	٣٠	٣	٠	٩٠
سیب زمینی	٥٠	٠/٥٠	٦	٠	٠	٠	٧٥
کالباس	٤٦٠	٢/٢	١٠	٧٠	٠	٠	٤٠
شیر	٢٤٠	٠/٢	١٦	٢٢	١٠	٢٠	٨٣

فرموله کردن تابع هدف و تعریف محدودیت ها

$$\text{Min } Z = 800X_1 + 370X_2 + 230X_3 + 90X_4 + 75X_5 + 40X_6 + 83X_7$$

s.t:

محدودیت کالری

$$\begin{cases} 520X_1 + 500X_2 + 860X_3 + 600X_4 + 50X_5 + 460X_6 + 240X_7 \geq 1500 \\ 520X_1 + 500X_2 + 860X_3 + 600X_4 + 50X_5 + 460X_6 + 240X_7 \leq 2000 \end{cases}$$

محدودیت آهن

$$4/4X_1 + 3/3X_2 + 0/30X_3 + 3/4X_4 + 0/50X_5 + 2/2X_6 + 0/2X_7 \geq 5$$

محدودیت پروتئین

$$17X_1 + 85X_2 + 82X_3 + 10X_4 + 6X_5 + 10X_6 + 16X_7 \geq 30$$

محدودیت کربوهیدرات

$$30X_4 + 70X_6 + 22X_7 \geq 40$$

محدودیت چربی

$$\begin{cases} 30X_1 + 5X_2 + 75X_3 + 3X_4 + 10X_7 \geq 20 \\ 30X_1 + 5X_2 + 75X_3 + 3X_4 + 10X_7 \leq 60 \end{cases}$$

محدودیت کلسترول

$$180X_1 + 90X_2 + 350X_3 + 20X_7 \leq 30$$

$X_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

X_j نماد غذاها

مثال دوم

یک بیمارستان برای بالا بردن سود خود درصدد است که تبلیغات را در سطح وسیعی برنامه ریزی کند. سه نوع وسیله تبلیغاتی موجود عبارتند از: آگهی تبلیغاتی تلویزیون، آگهی تبلیغاتی رادیو و آگهی تبلیغاتی روزنامه. هزینه هر بار تبلیغات و تعداد مشتریانی که در معرض هر بار تبلیغات قرار میگیرند، برحسب نوع وسیلهٔ تبلیغات در جدول زیر داده شده است. حال مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

وسیله تبلیغات	تعداد افرادی که در معرض تبلیغات قرار می گیرند	هزینه (تومان)
آگهی تبلیغاتی تلویزیون	۲۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰
آگهی تبلیغاتی رادیو	۱۲۰۰۰	۶۰۰۰۰
آگهی تبلیغاتی روزنامه	۹۰۰۰	۴۰۰۰۰

شرکت باید محدودیتهای زیر را در تبلیغات خود مدنظر داشته باشد:

۱- کل بودجهٔ تبلیغات یک میلیون تومان است.

۲- مجوز تعداد تبلیغات تلویزیون حداکثر ۴ نوبت است.

۳- مجوز تعداد تبلیغات رادیو حداکثر ۱۰ نوبت است.

۴- مجوز تعداد آگهی روزنامه برای ۷ نوبت است.

۵- مجموع آگهی‌های تبلیغاتی در سه وسیله نباید بیشتر از ۱۵ نوبت باشد.

تعریف متغیّرهای مدل

در این مسئله سه نوع متغیر تصمیم وجود دارد که هر یک از آنها بیانگر تعداد تبلیغات در هر وسیله است. به شرح زیر:

X_1: تعداد آگهی تبلیغاتی تلویزیون

X_2: تعداد آگهی تبلیغاتی رادیو

X_3: تعداد آگهی تبلیغاتی روزنامه

خلاصه مدل

$$\text{Max } Z = 20000X_1 + 12000X_2 + 9000X_3$$

St:

$$150000X_1 + 60000X_2 + 40000X_3 \geq 1000000$$

$$X_1 \geq 4$$

$$X_2 \geq 10$$

$$X_3 \geq 7$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 15$$

X_1 و X_2 و $X_3 \geq 0$

مثال سوم

بیمارستانی هفتصد میلیون ریال سرمایه دارد که می خواهد در بخش های مختلف سرمایه گذاری نماید. زمینه های مختلف سرمایه گذاری عبارتند از: اوراق قرضه با ۵/۸ ٪ بازده سالانه، سپرده بانکی با ۵ ٪ بازده سالانه، اسناد خزانه با ۵/٦ ٪ بازده سالانه و خرید سهام با ۱۳ ٪ بازده سالانه. زمینه های سرمایه گذاری همگی پس از یکسال قابل ارزیابی و بازنگری هستند. هر زمینه سرمایه گذاری دارای ریسک مختص به خود است. بنابراین سرمایه گذار بمنظور کاهش ریسک درصدد تقسیم سرمایهٔ خود بین بخشهای مختلف سرمایه‌گذاری است. برای گریز از ریسک،سرمایه-گذار سیاست سرمایه گذاری را به صورت زیر مشخص کرده است:

۱- مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه بیشتر از ۲۰ ٪ کل سرمایه نباشد.

۲- مبلغ سرمایه گذاری در سپردهٔ بانکی بیش از مجموع سرمایه‌گذاری در سه زمینهٔ دیگر نباشد.

۳- مجموع سرمایه گذاری در اسناد خزانه و سپردهٔ بانکی حداقل ۳۰ ٪ کل سرمایه باشد.

٤- به منظور ایجاد حاشیه اطمینان، نسبت مجموع سرمایه گذاری در سپردهٔ بانکی و اسناد خزانه به مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه و خرید سهام ۲/۱ به ۱ باشد.

حال مسئله را به منظور حداکثر کردن کل بازده سالانه ناشی از سرمایه گذاری در زمینه های مختلف فرموله کنید. با توجه به این نکته که سرمایه گذار تمایل دارد کل سرمایه خود را سرمایه گذاری نماید.

تعریف متغیّرهای مدل

چهار متغیر تصمیم برای این مسئله وجود دارد که هر یک از آنها مبلغ سرمایه گذاری را در هر زمینهٔ خاص نشان می دهد.

X_1: مبلغ سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه

X_2: مبلغ سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی

X_3: مبلغ سرمایه‌گذاری در اسناد خزانه

X_4: مبلغ سرمایه‌گذاری در خرید سهام

خلاصه مدل

$$\text{Max } Z = 0/085\ X_1 + 0/05\ X_2 + 0/065\ X_3 + 0/13\ X_4$$

St:

$$X_1 \leq 140000000$$

$$X_2 - X_1 - X_3 - X_4 \leq 0$$

$$X_2 + X_3 \geq 210000000$$

$$X_2 + X_3 - 1/2\ X_1 - 1/2\ X_4 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 700000000$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

مثال چهارم

نیروی انسانی مورد نیاز برای حفظ امنیت و تردد پرسنل در بیمارستانی در جدول زیر داده شده است. پرسنل در شیفت های ۸ ساعته که در فواصل زمانی ٤ ساعته می باشد یعنی نیمه شب، ٤AM، ۸AM و... کار می کنند. چند نفر پرسنل بایستی در شروع هر دوره زمانی سر کار باشند تا کل پرسنل مورد نیاز برای برآورد کردن الزامات به حداقل برسد. این مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

تعداد پرسنل مورد نیاز	دوره زمانی
۵	۰۰:۰۱ – ٤:۰۰
۷	٤:۰۱ – ۸:۰۰
۱۵	۸:۰۱ – ۱۲:۰۰
۷	۱۲:۰۱ – ۱٦:۰۰
۱۲	۱٦:۰۱ – ۲۰:۰۰
۹	۲۰:۰۱ – ۲٤:۰۰

تعریف متغیّرهای مدل

متغیرهای تصمیم در این مسئله به صورت زیر تعیین می‌شود:

X_1: تعداد کارکنان در شیفت اول

X_2: تعداد کارکنان در شیفت دوم

X_3: تعداد کارکنان در شیفت سوم

X_4: تعداد کارکنان در شیفت چهارم

X_5: تعداد کارکنان در شیفت پنجم

X_6: تعداد کارکنان در شیفت ششم

خلاصه مدل

$$\text{Min } z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

s.t:

$$X_1 + X_2 \geq 7$$

$$X_2 + X_3 \geq 15$$

$$X_3 + X_4 \geq 7$$

$$X_4 + X_5 \geq 12$$

$$X_5 + X_6 \geq 9$$

$$X_6 + X_1 \geq 5$$

$$Xi \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 6$$

برنامه ریزی با اعداد صحیح

مقدمه

مسائل واقعی بسیاری وجود دارد که وقتی در قالب مدل ارائه می‌شوند، مقادیر عددی متغیرهای تصمیمی آنان باید بصورت عدد صحیح باشند . برنامه‌ریزی عدد صحیح ، یک واژه عام برای مدل‌های برنامه ریزی ریاضی با شرط عدد صحیح بودن تمام یا برخی از متغیرهاست . این مسائل معمولا به نام برنامه‌ریزی با اعداد صحیح محض یا آمیخته خوانده می شوند .

به صورت دقیقتر ، برنامه ریزی با اعداد صحیح یک مسأله غیرخطی را تعریف میکند ، زیرا توابع مختلف مسأله تنها به ازای مقادیر گسسته متغیرها تعریف میشوند . درهرحال، وقتی منظور ایجاد الگوریتم‌های با اعداد صحیح است، یک مسأله، هنگامی خطی تلقی می‌شود که پس از حذف قید عدد صحیح بودن از متغیرها، مسأله پیوسته هم ارز با آن، یک مسأله برنامه‌ریزی خطی باشد . در غیر اینصورت آن مسأله در رده مسائل غیرخطی قرار می‌گیرد. این رده بندی مفید است زیرا تمام الگوریتمهای با عدد صحیح که اخیرا متداول شده اند بر اساس صورت پیوسته مسأله با عدد صحیح بنا شده اند .

مقدمه

- برنامه ریزی عدد صحیح (IP) نام گروهی از مسائل برنامه ریزی خطی است که در آن کلیه یا تعدادی از متغیرها حتماً باید اعداد صحیح غیر منفی باشند. برای حالت عمومی برنامه ریزی خطی متغیرهای تصمیم بهینه می توانند هر مقدار غیر منفی صحیح یا غیر صحیح باشند. متاسفانه اعداد غیر صحیح (کسری) در بسیاری از مسائل نه عملی هستند و نه معنی دار. این مشکل در اکثر مسائل مربوط به پزشکی، پیراپزشکی، تجارت، مسائل تولیدی و نظامی وجود دارد. برای نمونه اگر در مثال **انتخاب تعداد مناسب تخت های بیمارستان** جواب به صورت کسری حاصل شود (مثلاً تعداد ماشین ماک ۳۷.٦ محاسبه شود) اصالتاً پاسخ معنی داری نیست. برای حل این معضل برنامه ریزی عدد صحیح که پاسخ های حاصل از آن اعداد صحیح هستند مورد استفاده قرار می گیرد.

به طور کلی می توان گفت برنامه ریزی اعداد صحیح همان برنامه ریزی خطی است که شرط بخش پذیری برای آن صادق نیست.

مثال

- بیمارستانی بررسی چهار پروژه بهداشتی مختلف را برای سرمایه گذاری در سه سال آینده مد نظر دارد. جدول زیر اطلاعات مربوط به چهار پروژه را ارائه می کند. به منظور حداکثر کردن درآمد ناشی از پروژه ها چه ترکیبی از پروژه ها را باید انتخاب کرد.

پروژه	ارزش فعلی خالص	سال ۱	سال ۲	سال ۳
۱	۸۰	۱۰	۱۲	۱٤
۲	۱۰۰	۱۵	۱۸	۲۰
۳	۱۵۰	۲۰	۲۲	۲٤
٤	۱۲۰	۱۲	۱٤	۱٦
حداکثر بودجه موجود		۳۵	۳۵	۳۵

خلاصه مدل

- $\text{Max } Z = 80\,X_1 + 100\,X_2 + 150\,X_3 + 120\,X_4$

s.t:

$$10X_1 + 15\,X_2 + 20\,X_3 + 12\,X_4 \leq 35$$

$$12X_1 + 18\,X_2 + 22\,X_3 + 14\,X_4 \leq 35$$

$$14X_1 + 20\,X_2 + 24\,X_3 + 16\,X_4 \leq 35$$

$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 = 0$ یا 1

برنامه ریزی با مدل حمل و نقل

مدل حمل و نقل

- مدل برنامه ریزی خطی حمل و نقل
- مدل ویژه حمل و نقل
- حل مدل حمل و نقل
- مسأله تخصیص (واگذاری)

مثال

- یک شرکت دارویی دارای ۹۰ کامیون است که می تواند کالاهای تولیدی را از سه انبار به سه شهر حمل نماید. مدیر شرکت می تواند همواره ۳۰ کامیون را به هریک از مسیرهای مربوط اختصاص دهد ولی مدیر شرکت می خواهد به گونه ای عمل کند که سود کل ناشی ا حمل و نقل حداکثر شود. جدول زیر سد ناشی از هر بار حمل را در مسیر انبارهای A و B و C به شهرهای ۱ و ۲ و ۳ نشان می دهد. ارقام داخل جدول سود هر بار حمل و نقل را به هزار تومان به هریک از شهرها نشان می دهد. شرکت می تواند حداکثر ٤٠ کامیون را به شهر ۱، ٦٠ کامیون را به شهر ۲ و ٥٠ کامیون را به شهر ۳بفرستد. مدیر شرکت می خواهد بداند که چه تعداد کامیون را به هر مسیر اختصاص دهد که سود کل حمل و نقل حداکثر شود. مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

شهر / انبار	1	2	3
A	180	210	160
B	100	70	90
C	140	80	220

تعریف متغیّرهای مدل

- متغیرهای تصمیم در این مسئله به صورت دو اندیس می باشد:

انبارها به ترتیب A و B و C و شهرها به ترتیب ۱ و ۲ و ۳ و X_i ها محصولات می باشند.

- X_{A1} : کالای حمل شده از انبار A به شهر ۱
- X_{A2} : کالای حمل شده از انبار A به شهر ۲
- X_{A3} : کالای حمل شده از انبار A به شهر ۳
- X_{B1} : کالای حمل شده از انبار B به شهر ۱
- X_{B2} : کالای حمل شده از انبار B به شهر ۲
- X_{B3} : کالای حمل شده از انبار B به شهر ۳
- X_{C1} : کالای حمل شده از انبار C به شهر ۱
- X_{C2} : کالای حمل شده از انبار C به شهر ۲
- X_{C3} : کالای حمل شده از انبار C به شهر ۳

فرموله کردن تابع هدف و تعریف محدودیت ها

$$\text{Max } z = (180X_{A1} + 210X_{A2} + 160X_{A1}) + (100X_{B1} + 70\,X_{B2} + 90X_{B3}) + (140X_{c1} + 80X_{c2} + 22X_{c3})$$

St:

$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \leq 40$ محدودیت کامیونها برای حمل کالا به شهر شماره ۱

$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \leq 60$ محدودیت کامیونها برای حمل کالا به شهر شماره ۲

$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \leq 50$ محدودیت کامیونها برای حمل کالا به شهر شماره ۳

$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} = 30$ محدودیت برای مسیر شماره ۱

$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 30$ محدودیت برای مسیر شماره ۲

$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 30$ محدودیت برای مسیر شماره ۳

$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} = 90$ محدودیت کامیونها

$X_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3)$

مثال

- یک بیمارستان چهار نوع زباله بیمارستانی A و B و C و D تولید می کند. این بیمارستان قادر است زباله ها را به دو روش انهدام در بیمارستان (روش ۱) و انتقال به مکان دیگر (روش ۲) از بین ببرد. بیمارستان قادر است در هر نوبت ۲۰ واحد از زباله نوع A، ۵۰ واحد از زباله نوع B، ۳۰ واحد از زباله نوع C و ۱۵ واحد از زباله نوع D را منهدم نماید. همچنین قادر است در هر نوبت حمل زباله ۶۰ واحد از زباله نوع A، ۲۵ واحد از زباله نوع B، ۱۵واحد از زباله نوع C و ۲۵واحد از زباله نوع D را انتقال دهد. هزینه انهدام زباله در بیمارستان روزانه ۹۰۰۰۰ تومان و هزینه حمل همان مقدار زباله به خارج از بیمارستان روزانه ۱۱۰۰۰۰ می باشد.

اگر این بیمارستان ملزم باشد تا در هفته ۱۹۰ واحد از زباله نوع A، ۱۷۰ واحد از زباله نوع B، ۹۰ واحد از زباله نوع C و ۱۰۰ واحد از زباله نوع D را از بین ببرد هریک از دو روش به چه میزان باید استفاده شوند تا زباله های مورد نظر با حداقل هزینه از بین برده شود. مدل برنامه ریزی خطی این مساله را بنویسید.

تعریف متغیّرهای مدل

- متغیرهای تصمیم در این مسئله به صورت دو اندیس می باشد:

زباله های چهارگانه A و B وC و D و روش های انهدام ۱ و ۲:

- X_{1A} : زباله منهدم شده نوع A در داخل بیمارستان
- X_{1B} : زباله منهدم شده نوع B در داخل بیمارستان
- X_{1C} : زباله منهدم شده نوع C در داخل بیمارستان
- X_{1D} : زباله منهدم شده نوع D در خارج از بیمارستان
- X_{2A} : زباله منهدم شده نوع A در خارج از بیمارستان
- X_{2B} : زباله منهدم شده نوع B در خارج از بیمارستان
- X_{2C} : زباله منهدم شده نوع C در خارج از بیمارستان
- X_{2D} : زباله منهدم شده نوع D در خارج از بیمارستان

فرموله کردن تابع هدف و تعریف محدودیت ها

$$\text{Max } z = 90000\,(X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} + X_{1D}) + 110000\,(X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} + X_{2D})$$

St:

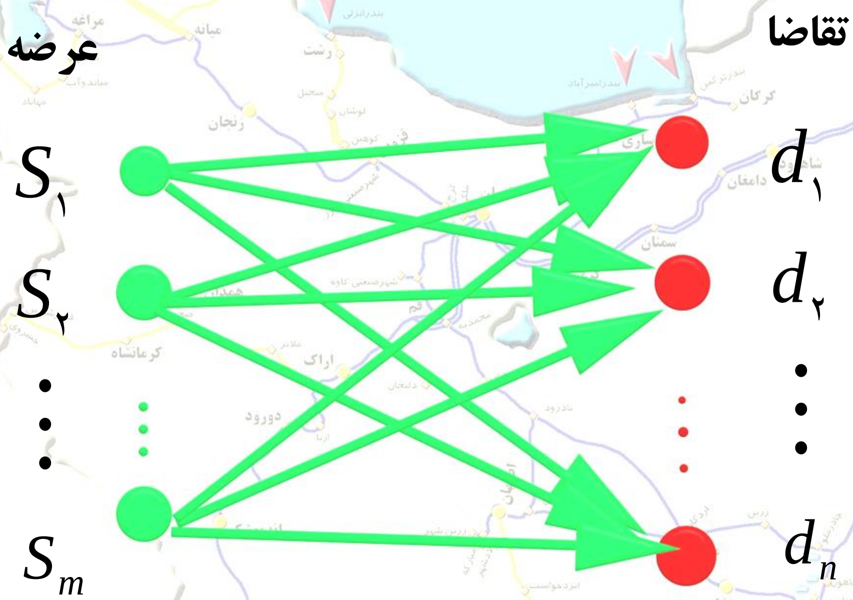
$20\,X_{1A} + 60\,X_{2A} \leq 190$ محدودیت حداکثر زباله نوع اول

$50\,X_{1B} + 25\,X_{2B} \leq 170$ محدودیت حداکثر زباله نوع دوم

$30\,X_{1C} + 15\,X_{2C} \leq 90$ محدودیت حداکثر زباله نوع سوم

$15\,X_{1D} + 25\,X_{2D} \leq 100$ محدودیت حداکثر زباله نوع چهارم

$X_A, X_B, X_C, X_D \geq 0$



C_{ij} هزینه ارسال هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j

x_{ij} میزان کالای ارسالی از مبدأ i به مقصد j

$$\min z = \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = S_i \,(i = ۱,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = d_j \,(j = ۱,\ldots,n)$$

$$x_{ij} \geq ۰$$

$$\sum_i S_i = \sum_j d_j$$

شرط توازن

مسأله حمل ونقل متوازن یا متعادل

مدل حمل و نقل

مقصد

مبدأ

				عرضه
$c_{۱۱}$ $x_{۱۱}$	$c_{۱۲}$ $x_{۱۲}$	$\cdots$	$c_{۱n}$ $x_{۱n}$	$S_{۱}$
$c_{۲۱}$ $x_{۲۱}$	$c_{۲۲}$ $x_{۲۲}$	$\cdots$	$c_{۲n}$ $x_{۲n}$	$S_{۲}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$ $\vdots$ $\ddots$	$\vdots$	
$c_{m۱}$ $x_{m۱}$	$c_{m۲}$ $x_{m۲}$	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	S_{m}
تقاضا $d_{۱}$	$d_{۲}$		d_{n}	$\sum_i S_i = \sum_j d_j$

استفاده از مدل حمل و نقل در مسائلی غیر از حمل و نقل

- ویژگی ها و کارا بودن روش های حمل، در مدل حمل و نقل به گونه ای است که می توان از این مدل در مسائل دیگری بجز حمل و نقل و ترابری استفاده کرد.

- استفاده از مدل حمل و نقل در جایابی
- مدل حمل و نقل برای برنامه ریزی جامع تولید

استفاده از مدل حمل و نقل در جایابی

- محل های کاندیدا برای تاسیس یک شرکت دارویی یا بیمارستان یا فروشگاه تجهیزات پزشکی و یا یک انبار می تواند متعدد و بسیار زیاد باشد. استفاده از مدل حمل و نقل بعد از بررسی های اولیه از طریق روش های دیگر جایابی و کاهش تعداد مکان های کاندید شده، بسیار مفید است.

مثال–جایابی

- بیمارستانی به منظور توسعه بخش های خود در ۵ سال آینده، توسط سه تامین کننده موجود خود نیازمند تامین ۲۰۰ واحد تجهیزات اولیه پزشکی در سال می باشد. پیش بینی مواد مورد نیاز سالانه این سه تامین کننده معادل ۲۰۰، ۳۰۰ و ٤۰۰ واحد می باشد. نیاز فعلی بیمارستان از طریق دو انبار موجود ۱ و ۲ که هرکدام به ترتیب ۳۰۰ و ٤۰۰ واحد کالا عرضه می کند تامین می گردد.

بیمارستان بعد از بررسی زیاد از میان مکان های مختلف برای تاسیس انباری که بتواند این ۲۰۰ واحد اضافی را ارائه نماید نهایتا دو محل را که آن ها را ۳ و ٤ می نامیم به عنوان بهترین ها انتخاب نموده است. هزینه ارسال هر واحد کالا از هریک از انبارها و محل های کاندید شده به سه تامین کننده در جدول زیر ارائه گردیده است. هدف انتقال محلی است که هزینه را حداقل نماید.

تامین کننده انبار	A	B	C	میزان عرضه مواد اولیه
١	٢٠٠	٣٠٠	٢٠٠	٣٠٠
٢	١٠٠	١٠٠	٣٠٠	٤٠٠
٣	٣٠٠	٢٠٠	١٠٠	٢٠٠
٤	١٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠
مقدار کالای مورد نیاز	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	

تامین کننده / انبار	A	B	C	عرضه
١	200 ١٠٠	300	200 ٢٠٠	٣٠٠
٢	100 ١٠٠	100 ٣٠٠	300	٤٠٠
٣	300	200	100 ٢٠٠	٢٠٠
تقاضا	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	

حداقل هزینه سالانه = ١٢٠٠٠٠

تامین کننده / انبار	A	B	C	عرضه
۱	200	300	200 ۳۰۰	۳۰۰
۲	100	100 ۳۰۰	300 ۱۰۰	۴۰۰
٤	300 ۲۰۰	200	100	۲۰۰
تقاضا	۲۰۰	۳۰۰	٤۰۰	

حداقل هزینه سالانه = ۱٤۰۰۰۰۰

مساله تخصیص و برنامه ریزی خطی

مدل تخصیص *(Assignment)* مدلی خاص از مسئله حمل و نقل می‌باشد که برای تخصیص یک کار یا فعالیت یا شغل یا وظیفه به یک ماشین، کارگر، یا شخص استفاده می‌شود به گونه‌ای که هزینه تخصیص حداقل گشته و یا بهره‌وری و سود ناشی از تخصیص حداکثر گردد.

☜ **نکته:** در مدل تخصیص تعداد عرضه m و تقاضا n با هم برابر بوده $(m=n)$ و همچنین مقدار مقادیر عرضه و تقاضا مساوی یک می‌باشد.

شکل کلی مدل تخصیص

ماتریس هزینه یک مسئله تخصیص به صورت زیر ترسیم می‌شود.

شغل / فرد	۱	۲	....	j	...	n
۱	$C_{۱۱}$	$C_{۱۲}$	....	$C_{۱j}$	...	$C_{۱n}$
۲	$C_{۲۱}$	$C_{۲۲}$	....	$C_{۲j}$	...	$C_{۲n}$
⋮	⋮					
i	$C_{i۱}$	$C_{i۲}$	....	C_{ij}	...	C_{in}
⋮	⋮					
n	$C_{n۱}$	$C_{n۲}$	....	C_{nj}	...	C_{nn}

روش شمارش کامل

می‌خواهیم n شغل را به n فرد تخصیص دهیم به گونه‌ای که حداکثر بهره‌وری حاصل شود. در این روش کلیه حالات ممکن تخصیص شغل‌ها به افراد در نظر گرفته شده و برای هرکدام مقدار تابع هدف را محاسبه می‌کنیم. بهترین حالت وقتی است که تابع هدف کمترین مقدار را داشته باشد. این روش کاربرد چندانی ندارد.

☜ **نکته:** تعداد کل حالات تخصیص n شغل به n فرد $n!$ می‌باشد.

در برنامه‌ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص پارامترها به شکل زیر تعریف می‌شود.

x_{ij}: متغیرهای تصمیم برای تخصیص n فرد به n شغل

C_{ij}: هزینه تخصیص فرد i ام به شغل j ام

حال مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$S.t: \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد } i \text{ ام کار } j \text{ ام را انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

محدودیت اول نشان می‌دهد که باید به همه افراد شغل تخصیص داده شود و محدودیت دوم نشان می‌دهد که باید به هر شغلی یک فرد تخصیص داده شود.

مدل تخصیص

مدل تخصیص در واقع نوع خاصی از مدل حمل و نقل می‌باشد که در آن مشاغل (عرضه) به افراد (تقاضا) تخصیص داده می‌شود و به این ترتیب $(n.n = n^{2}$ متغیر تصمیم (x_{ij}) وجود خواهد داشت که‌ازاین‌متغیرهاتعداد$(n + n - 1 = 2n - 1)$متغیراساسی،خواهدبود.ولی چون‌هرمتغیراساسی بامقدار یک، همزمان نیازمندی یک سطر و ستون را برآورده می‌کند، پس در هر سطر یا ستون یک متغیر اساسی با مقدار صفر داریم. به عبارت دیگر از $2n - 1$ متغیر اساسی n متغیر اساسی با مقدار یک و $n-1$ متغیر اساسی با مقدار صفر (جوابهای تبهگن) وجود دارد.

مثال

- برای تعیین مدیر ۵ بیمارستان در نقاط مختلف کشور که تحت پوشش یک بیمارستان بزرگ می باشد، ۵ کاندیدا معرفی شده است. حقوق درخواستی هر مدیر در بیمارستان های مختلف مطابق جدول می باشد. فرض بر این است که امکان تخصیص هر مدیر به هر بیمارستان وجود دارد. هدف تخصیص مدیران با حداقل هزینه پرداخت حقوق می باشد.

مدیران \ کارخانجات	1	2	3	4	5
1	2	4	5	1	4
2	4	7	8	11	7
3	3	9	8	10	5
4	1	3	5	1	4
5	7	1	2	1	2

خلاصه مدل برنامه ریزی خطی

$$Min\ Z = ۲x_{۱۱} + ۴x_{۱۲} + ۵x_{۱۳} + x_{۱۴} + ۴x_{۱۵} + ۴x_{۲۱} + ۷x_{۲۲} + ۸x_{۲۳} + ۱۱x_{۲۴} + ۷x_{۲۵} + ۳x_{۳۱} + ۹x_{۳۲}$$

$$۸x_{۳۳} + ۱۰x_{۳۴} + ۵x_{۳۵} + x_{۴۱} + ۳x_{۴۲} + ۵x_{۴۳} + x_{۴۴} + ۴x_{۴۵} + ۷x_{۵۱} + x_{۵۲} + ۲x_{۵۳} + x_{۵۴} + ۲x_{۵۵}$$

$st:$

$$x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} + x_{۱۴} + x_{۱۵} \leq ۱$$

$$x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} + x_{۲۴} + x_{۲۵} \leq ۱$$

$$x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} + x_{۳۴} + x_{۳۵} \leq ۱$$

$$x_{۴۱} + x_{۴۲} + x_{۴۳} + x_{۴۴} + x_{۴۵} \leq ۱$$

$$x_{۵۱} + x_{۵۲} + x_{۵۳} + x_{۵۴} + x_{۵۵} \leq ۱$$

$$x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} + x_{۴۱} + x_{۵۱} = ۱$$

$$x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} + x_{۴۲} + x_{۵۲} = ۱$$

$$x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} + x_{۴۳} + x_{۵۳} = ۱$$

$$x_{۱۴} + x_{۲۴} + x_{۳۴} + x_{۴۴} + x_{۵۴} = ۱$$

$$x_{۱۵} + x_{۲۵} + x_{۳۵} + x_{۴۵} + x_{۵۵} = ۱$$

$$x_{ij} \geq ۰ \quad (i = ۱, \dots, ۵)\ (j = ۱, \dots, ۵)$$